一刀切り -One Complete Straight Cut- の理論と実践

１．はじめに

普通部に入学した当初から僕が常に頭の片隅で考えあぐねていたのは、労作展のテーマをどうするか、ということだった。どうせ取り組むのであれば、自分の好きなテーマで掘り下げたい。そこで自分という人間をよく振り返ってみると、僕は幼少期の頃から不思議と数字やパズルが好きだった。母と買い物に行って、レジでおつりの計算をレジスターの機械と競ったり、行き帰りのドライブ中も通りすぎる車のナンバープレートで１０を作る計算を飽きずにやっていたものだった。そしてタングラムや数独やゾムツールなどの算数パズルで遊ぶのが大好きだった。それから僕という人間のもう一つの大事な要素は小 2 から小 3 にかけての海外生活だ。この経験で日本から一歩外に出ると本当に多種多様なバックグラウンドや個性や才能を持っている人達が沢山いて、自分が今まで思っていた当たり前が全然通用しないということが分かった。それで僕はそれまでは友達は自然に出来るものと思っていたけれど、おどけてみたり、自分の好きなことを見せてみたり、色々に努力して何人かの親しい友達を作ることができた。海外にはまた必ず長期滞在したいし、その時に友達や周りの人ともっと深く分かり合えるように自分を伝える術である英語をもっと磨きたいと思っている。そして自分の得意なことや好きなことは何となく好きというレベルではなくて、こだわりや深い知識も持っていると自分を表現するのに役立つということも経験から得た教訓だ。これらのことを考え合わせると、僕の僕らしい労作展のテーマは英語を使って数学のパズル的な内容を探求するという所まで絞れてきた。

ここまで絞って父と母に相談すると、身近で日本らしい題材だし Origami Mathmatics はどうかと提案された。ユニット折り紙で多面体を作ったこともあったので面白そうだと思った。母が昔面白いと思って取っておいたという Erik Demaine という数学者の記事(注１)を読んで、その内容に僕はひどくびっくりしてワクワクした。誰でも小さい時に折り紙をたたんで星形を切り出したことがあると思うが、Erik は折り紙をたたんで一度はさみを入れるだけでどんな形でも無限に作れることを証明したというのだ。本当だろうか。どうやって折るのだろう。折り紙は日本の文化と思っていたが Erik はカナダ人の若き天才数学者で、その研究に関する文献は彼のサイトも含め英文が多い。僕はこの夏休みを使って、Erik の理論を理解することと、その理論を使って自分の好きな形でオリジナルの折り目設計をすることをテーマに労作展に取り組もうと思う。

2. 一刀切りとは

紙上にある多角形 P が描かれているとする。一刀切りとは、その紙をうまく折りたたんだ後、折りたたまれた紙を直線状に一回切り、多角形 P を紙からそっくり切り出すことをいう。

例えば長方形の紙に白鳥の形の多角形やエンゼルフィッシュの形の多角形が描かれている。それぞれを図１図２の点線に沿って折り、一直線に折り重なった実線上で切ると白鳥とエンゼルフィッシュの図形を切り出すことができる。この折り方と切る線を図形を切り抜くための設計図とよぶことにする。

本研究では、Erik Demaine により提唱された定理 「Every plane graph drawn with straight segments on a piece of paper may be folded to a flat origami in such a way that one straight cut completely through the flat origami cut exactly the vertices and edges of the graph, and nothing more. In particular, any collection of polygons may be so cut out. （紙面に直線で描かれたいかなる図形も、平面に折りたたみ、一度直線的にはさみを入れただけで全ての頂点と辺のみを正確に切ることができる。つまり、いかなる多角形も一刀でそのまま切り出

すことができる。)」を題材に、実際に手元で折り紙をしながら検証し、その数学的な理論を理解することと、その理論と手法を使って自分でオリジナルの設計図作成（KEIO の四文字とペンマーク）をすることを試みる。使用するのは折り紙、A4 方眼紙、A4 コピー用紙、はさみ、裁断機、定規、分度器、コンパス、参考文献である。

手始めに折り紙を使って、色々な幾何模様を切り抜くという試みをしてみた。遊びとして小さい頃に行ったのは、適当に折った紙を切ったら思いがけない形が出来たというものだったが、今回は手順が逆で、まず目標の形があって、それを切り出すための折り方切り方を考えるというものだ。いくつも折って切ってみる中で、何点か気付いたことがある。それは、同じ折り方をしても切る線の向きによって切り出される形はまるで違う図形になるということと、似たような図形を切り抜く場合でも四つ折りや八つ折りを元にして中心点から点対称に考えていくアプローチと、平行に折りたたむことを直角方向に重ねて考えていくアプローチの二通りがあるということだ。更に折り紙で鶴を折るときのように広げてつぶすように折る折り方のアプローチも取りうるかもしれない。このことは同じ図形の折り方でも解が一通りとは限らないことを示唆しているのではないかと思う。また無理に切り取りたい線を重ねようとして、折り目がふくらんでしまい、平らにするために折り目を追加する必要が出ることもあった。Erik は一刀切りの定理を完成するアルゴリズムを考案したことによって、一刀切りで作れる多角形は無限であることを証明したのだが、これらの場合はアルゴリズムではどう解決されているのだろうか。

３．一刀切り問題の証明の経緯とその理論

「一刀切りによってどれだけの形を作ることができるか」という一刀切り問題は 1960 年に Martin Gardner という数学パズル作家によって提唱された。この一刀切り問題を考える上ではまず折り紙を平坦折りするために折り線が満たすべき局所条件が前提としてある。

定理 1「折り線に沿って紙を平坦に折りたためるとき、折り線の任意の頂点のまわりで、次の条件が満たされなければばならない。」

① 頂点の次数は偶数である。(偶数次数定理)

② 各頂点のまわりで、山折りと谷折りの本数の差は 2 である。(前川・Justin 定理)

折り紙の設計図において、２本あるいはそれ以上の折り線が紙の境界以外の部分で交差し

ているところを頂点とよぶ。また頂点から伸びる折り線の数を次数とよぶ。一刀切りの折り線を設計する際には、少なくとも上記の条件が各頂点のまわりで満たされている必要がある。

定理２「①任意の三角形を一刀切りできる。②任意の四角形を一刀切りできる。③任意の多角形を一刀切りできる。」

Erik Demain によると、ある多角形 P のそれぞれの角の二等分線と、その交点からそれぞれの辺に下した垂線を折っていくと、どれだけ複雑な形でも多角形は最終的に三角形と四角形に分割できる。さらに折り目を追加すれば、三角形を四角形が一直線上に並ぶように折りたたむことができる。
まず①三角形の場合、△ABC（図４）において AD,BD,CD はそれぞれ∠A,∠B,∠C の二等分線であり、BC と直行する線分 DH を引く。一刀切りをするには全ての辺が重なりあうように折らなければならず、そのため二辺の交点で角を二等分しなければならない。三角形の三つの二等分線は一点（内心）で交わる。AB と AC が重なるように二等分線で折るとき、BC は途中で折れて重なり合わなければならず、そのため D から BC に下した垂線も折り線になる。このとき折り線は 4 本になり（次数偶数定理）山折り線 AD,BD,CD と谷折り線 DH で差は 3-1=2(前川・Justin 定理)と先述の基本定理を満たしている。

次に②－１凸四角形（図５）の場合、∠A,∠B の二等分線の交点と∠C,∠D の二等分線の交点を結ぶ EF と E と F から下した垂線が折り線になる。②－２凹四角形（図６）の場合、∠A,∠B の二等分線の交点と∠C の二等分線と∠D の二等分線の延長の交点を結ぶ EF を描き、E と F から下した垂線が折り線になる。どちらの場合も頂点 E,F のまわりで三角形の

時と同様に先述の基本定理を満たしている。

③与えられた多角形に対して角の二等分線で作られるグラフ（折り線）を「直線骨格 Straight Skeleton」とよぶ。四角形が内接円を持つ場合は、直線骨格は次数 4 の頂点が 1 つの放射線状のグラフとなり、直線骨格を折り線とすれば一刀切りできる。内接円を持たない四角形の直線骨格は頂点が 2 つの木構造となる。直線骨格の 2 頂点から四角形の辺の垂線を下して折り線に加えれば四角形も一刀切りすることができる。図 5 図 6 で示したように、この方法は凹凸双方の四角形に通用する。また直線骨格が木構造であれば、多角形に対しても数学的帰納法によって同じ方法を適用することができる。Erik はまず図形の中に円を描く計算幾何学の手法を使って折り線を導き、さらにどの順番で折り線を入れていけば全ての辺を一つの線上に乗せられるかのアルゴリズムを編み出した。Erik の考案したアルゴリ

ズムは簡易的にすると次のようなものだ。

1　与えられた図形の内側に各辺からの距離がｄ＞０となる図形を描き、ｄをだんだん大きくしていく。このときの頂点の軌跡が折り目となる。初めて１を実行するときのみ折り目を図形の外側にも延長する。
2　１の図形が点または線分の集まりになったとき、線分を折り目に加え、４に進む。
3　１の図形が２つ内部を持つ多角形、または線分に分かれたとき、線分は折り目とし、内部を持つ多角形についてはそれぞれ１の操作に戻る。
4　折り目からなる図形の各頂点から与えられた多角形の辺に垂線を可能な限り下し、折り目とする。この折り目も図形の外側に延長する。ただし垂線と１から３の折り目が交わったときは、１から３の折り目に対して線対称となるように曲げて垂線を延長する。
5　１から３の折り目は必ず折り、４の折り目は折っても折らなくても良いという条件の下で正しい解を探す。

このようにして Erik Demain 等により 1999 年に直線骨格法（Straight-Skeleton Method）を用いた「ほとんど全ての場合」の証明が発表された。ここで「ほとんど全て」というのは、折り目が無限の長さになりアルゴリズムが終了しないことがあるということで、彼ら自身が示している。この問題点は 2000 年にディスクパッキング法（Disk-Packing Method）という別のアルゴリズムを用いることによって克服され、Erik Demain 等による一刀切り問題に対する完全なアルゴリズムが完成し、紙を折りたたみ一回切るだけで、どんな多角形でも無限に作れることが数学的に証明された。

4. 一刀切りの設計図の作成方法

任意の多角形について一刀切りが可能であるということとその方法論は何となく理解できたのだが、いざその設計図をオリジナルで作成するとなると Erik のアルゴリズムのようにはいかないだろう。今年の労作展において僕は「KEIO」の４文字と普通部のペンマークの折り目設計に取り組みたい。まず方眼紙を用いて「KEIO」の４文字を１文字ずつ直線の線分と直角および 45 度角のみでデザインすることから始めた（図７-1,2,3,4）。これはなるべく単純な図形にするためである。この際、黄金比にも留意してなるべくバランスの良い造形を心掛けた。普通部のペンマークは普通部ホームページからスクリーンショットを取り、拡大した上で曲線部分をおよその直線にして切り取り線にした。デザインした紙をコピーして複数枚用意し、その紙を折って思案し、折り線を記入して設計図を作成する。
作成手順は主に以下のようになると予想する。

1　アルファベット図形の線対称になる線でなるべく長い辺どうしが重なるように折る。
2　１に平行な線で重ねられる辺がある場合は繰り返して折る。
3　短い辺が長い辺に重なるように角の二等分線で折り返す。
4　出来た折り線がアルファベット図形の直線骨格になっていること、一直線上に吸収されていない辺がないか確認する。
5　折り重ねた紙の厚みを薄くできる他の折り順がないか検証する。
6　実際に裁断機にかけて確認する。
7　成功したら山折り線、谷折り線を書き込み、各頂点について次数偶数定理と前川・Justin定理が満たされていることを確認する。

作業を始めてみると「I」は容易に解にたどり着いたが「O」については字形デザインの方に少し変更を加えることでより正確ですっきりした折り線になることがわかった（図８）。もちろん任意の多角形について一刀切り可能なはずなので、元の図形に手を加えるのは反則な感じがするが、実際には折った紙の厚みなどで加えることができる折り線に限りがあり、数ミリ単位の調整を折り目を増やすことで解決することは難しい。ここでは元の図形の方を微調整することで正しい解を導くこととする。「E」にはかなり苦戦した。「E」は初めのうち真ん中の 2 等分線で図形を半折りすることから始めたが、何度折っても、いざ一直線上に揃えて切ってみると一部が切れていなかったり、逆に図形の一部が切り取られて欠如してしまったりした（図 9-1,2)。これは全ての辺が重なりきっていなかったり、折り重ねたときに本来内側になるべき部分を外側に折りだしてしまい、切り出し線そのものを切ることに成功していても、余計な線まで切れてしまったために切り出された図形が部分的に欠けてしまったという失敗だった。そこで、始めに半分折りにした図形の状態で進めるのではなく、蛇腹折りのように辺を重ねていくアプローチをとることによってようやく成功した。「K」とペンマークは辺をひとつに重ねていくコツがわかってきたのでスムーズに解にたどり着くことができた。作成手順は 1 と 2 に改善が必要だということがわかった。完成した「KEIO」とペンマークの設計図を図 10-1,2,3,4,5 に示す。

５．考察

僕が実際に手を動かし、折りながら導いた解を Erik のアルゴリズムでも同じように導けるか最も苦戦した「E」と「O」で検証してみた。(図 11-1,2)
やってみたら僕のように失敗を経ることなく正しい解にたどり着くことが出来た。更に「O」については僕の解とは違う折り方になり、一番折り重なった厚みを比べると僕の設計図は 24 枚、アルゴリズムによる設計図は 16 枚となった。実際に切っていくと、折り重なりが厚くなるほどに、作図した図形と実際に切り出した図形のずれが大きくなり、より薄い形となる設計図の方が優れていると考えられ、アルゴリズムの方が優れた解といえる。僕の手順では 1，２に改善が必要だが、どの図形にも通用するように改善するのはどうしたら良いかわからなかった。しかし、このアルゴリズムを用いるとどのパターンにも対応できる上におそらく最適な解を導けるのではないかと思う。但し Erik は章の最後でこう述べている。

Both algorithms are rather profligate in their use of creases. It would be interesting to find a way to reduce the number of creases and obtain a reasonable upper bound. Another way to view a consequence of this theorem is this: a polygonal piece of paper P may be folded to a common plane, with all the edges on P being folded to a common line. This view suggests that it would be natural to, in addition, map all the vertices of P to a common point. This additional condition is feasible for simple examples, but seems difficult to achieve in general. Whether the theorem can be strengthened in this way remains an open problem.（直線骨格法とディスクパッキング双方のアルゴリズム共、折り目の点では少々乱発気味だ。折り目の数を減らし適切な上限値にする方法を見つけるのは興味深いだろう。一刀切り定理の結論を別の見方をするとこうなる：ある多角形の形状をした紙片 P は全ての辺を一直線上にして平らにたたまれる。これは更に P の全ての頂点がある共通の一点に位置付けられてもおかしくないことを示しているだろう。この追加条件は単純な図形では実行可能だが、一般的にそうだというのは難しい。一刀切り定理がこの追加条件によって強化されるかどうかは未解決である。）

Erik のいう追加条件が、単に元の定理を言い換えたあとに飛躍してしまったように見えて、僕には彼の指摘する問題点を理解することが出来なかった。「map all the vertices of P to a common point」とはどういうことなのだろう。

６．まとめ

一刀切りでは、人が実際に手を動かしながら思考錯誤して得られる手順を、一つの普遍的なアルゴリズムに落とし込むには大きく発想を転換する必要があるということがわかった。昔からあるこの紙切り遊びを、すっきり数学で完成させた Erik はすごい人だ。また、日常の生活で目にする色々なデザインにも角度や辺の長さなど数学的に設計されていて、それが美しいと感じることに繋がっているのだなと字形のデザインをして感じた。次の目標としては、多角形の内側に別の多角形が内包されている形や、複数のアルファベットを一度に切り抜くことに挑戦してみたい。形がより複雑になるほどに、手作業による試行錯誤だけではなく、よりアルゴリズムに則った作業で直線骨格を書き込み垂線を下して選択する折り線を検証していくことになると思う。このような細かく精密な作業が出来るように、作図ソフトも使えるようになりたいと思う。またそのように複雑な図形と向き合う中で、最後に Erik が述べていた未解決な問題にも理解が追い付いたらよいなと思う。

最後に、小さい時からずっと算数パズルに一緒に付き合ってくれて、数学好きに育ててくれた父と、色々興味を引きそうな物を見つけては集め、この労作展の作業にも何日も付き合ってくれた母と、折り紙で横で一緒に遊んでくれた妹に感謝します。

７．参考文献

Erik D. Demaine and Joseph O' Rourke : Geometric Folding Algorithms, Linkages, Origami, Polyhedra.　Cambridge University Press, July, 2007.

Erik, Demaine. Examples of fold-and-cut. http://erikdemaine.org/foldcut/examples/.
参照日 2021/7/26

Erik, Demaine. Martin L, Demaine. Fold-and-Cut Magic.
http://erikdemaine.org/papers/FoldCut_G4G5/paper.pdf
参照日 2021/8/3

Erik, Demaine. Martin L, Demaine. Anna Lubiw. Folding and Cutting Paper
http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.54.373&rep=rep1&type=pdf
参照日 2021/7/26

Eric Biunno. The origami polygon cutting theorem
http://cgm.cs.mcgill.ca/~athens/cs507/Projects/2003/EricBiunno/
参照日 2021/8/3

朝日新聞ＧＬＯＢＥ　数学という力　2010/2/1 号　（注１）

マーティン・ガードナー著、岩沢宏和、上原隆平訳：完全版マーティン・ガードナー数学ゲーム全集３　ガードナーの新・数学娯楽、日本評論社、2016 年

秋山仁：数学センスをみがこう　生活応用編、NHK 出版、2008 年

志甫淳：平面折り紙の基本定理　東京大学　2018 年 10 月 6 日
https://www.ms.u-tokyo.ac.jp/tambara/docs/mc4h2018handout.pdf

雙知延行、藤原優伍他：一刀切りについて３　弓削商船高等専門学校紀要第 40 号　2018 年

竹縄知之：一刀切りのアルゴリズム　東京海洋大学　2017 年度東京海洋大学オープンキャンパス用資料より改編　https://researchmap.jp/wysiwyg/file/download/163634/80961
参照日 2021/8/3